

Numerische Untersuchungen charakteristischer Größen eines Plasmamodells

KARLHEINZ WILKE *

Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Hannover

(Z. Naturforsch. 23 a, 761—770 [1968]; eingegangen am 22. Februar 1968)

A fully 3-dimensional plasma consisting of up to 96 charged particles is simulated in a computer. The plasma is confined to a sphere (or cube) with specularly reflecting walls. The forces are computed using a predictor corrector method with variable time steps. From initial configurations randomly chosen the evolution of the plasma is followed numerically. Distribution functions and moments with respect to various phase variables are obtained as time averages: the distribution of velocity, kinetic and potential energy, of the electric microfield, the micropotential as measured at a neutral point of reference (usually the center of the system), the mean square electric field, the microfield correlation function and the particle relaxation times. As the sphere used in the experiments has dimensions only slightly larger than the Debye sphere, collective phenomena and those due to major density fluctuations cannot be expected. Despite these limitations the mean electric field is found to be high by approx. 10% compared to the Holtsmark field. Furthermore other comparisons to existing theories with respect to the variables already mentioned are carried out.

Mit den heutigen elektronischen Rechananlagen lassen sich Vielkörperprobleme durch numerische Integration der Bahnkurven innerhalb gewisser Grenzen lösen. Die Entwicklung eines solchen Systems aus einer vorgegebenen Anfangslage kann zeitlich verfolgt werden¹. Es ist daher möglich, Mittelwerte von Phasengrößen und deren Verteilungsfunktionen als Zeitmittelwerte zu erhalten. Zumindestens im Prinzip läßt sich damit das Axiom der statistischen Mechanik über die Gleichheit von Zeitmittel und Ensemblemittel umgehen. Einschränkungen dieses Verfahrens sind bedingt durch die begrenzte Kapazität der Rechner, die es z. Zt. bei voller dreidimensionaler Behandlung — auf die umfangreichen Experimente an eindimensionalen Systemen (Vlassow-Gleichung) soll hier nicht eingegangen werden (Literatur: z. B. DAWSON²) — nur gestattet, Systeme bis zu einigen 100 Teilchen zu behandeln^{3, 4}, und außerdem dadurch, daß die individuellen Bahnen bei endlichem Aufwand nicht völlig exakt berechnet werden: die Fehler wachsen exponentiell mit der Zeit an⁵; ein solches System ist also nicht reversibel. Ob statistische Aussagen wie Verteilungsfunktionen, Mittelwerte u. a. davon beeinflusst werden und in welchem Ausmaß dies die jeweiligen Phasengrößen wie Dichte, Druck oder Energie individuell betrifft, ist z. Zt. noch ungeklärt.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Plasma, bestehend aus $N=6, 24$ und 96 Teilchen, das insgesamt elektrisch neutral ist, numerisch simuliert. Um ein räumlich und zeitlich homogenes Plasma zu erzeugen, werden die Teilchen in ein spiegelndes Gefäß eingeschlossen, welches der Einfachheit halber in den meisten Fällen eine Kugel ist. Die Anfangsbedingungen werden so gewählt, daß der Gesamtimpuls sowie der Drehimpuls des Systems verschwindet und daß die mittlere Dichte n und die Temperatur T bzw. deren Kombination α^2 (dimensionslos)

$$\alpha^2 = k T / e^2 n^{1/3} \quad (1)$$

den gewünschten Wert annimmt. (α^2 ist das Verhältnis von mittlerer kinetischer Energie pro Teilchen zur potentiellen Coulomb-Energie zweier Teilchen, die sich im mittleren Abstand befinden.) Sternatmosphären und gewöhnliche Gasentladungen fallen etwa in den Bereich $2 < \alpha < 15$; in anderen Fällen kann α aber wesentlich darüber liegen (z. B. in der Sonnenkorona $\alpha \approx 10^3$). Bei der eben erwähnten Teilchenzahl $N \approx 10^2$ und einem α -Wert von 8 ist der Debye-Radius d nur wenig kleiner als der Kugelradius R :

$$\frac{d}{R} = \frac{\alpha}{(36\pi)^{1/3} N^{1/3}} \approx 0,8 \quad \text{mit } \alpha \approx 8 \text{ und } N = 96. \quad (2)$$

* Anschrift: 7031 Holzgerlingen, Bühlenstr. 71.

¹ S. v. HOERNER, Z. Astrophys. 50, 184 [1960].

² J. M. DAWSON, Phys. Fluids 7, 419 [1964].

³ S. J. AARSETH, Month. Not. Roy. Astron. Soc. 126, 223 [1963].

⁴ N. W. SHERMAN, persönliche Mitteilung 1964.

⁵ R. H. MILLER, Astrophys. J. 140, 250 [1964].



Das Plasma in der Kugel ist damit praktisch ein Knudsen-Gas. Abb. 1 zeigt einen Ausschnitt der Bahnen zweier Teilchen bei einer Gesamtteilchenzahl $N=6$ und einem α -Wert von 4. Im Mittel stößt ein Teilchen öfter mit der Wand zusammen als mit einem anderen Teilchen. Es ist daher nicht zu erwarten, daß in den vorliegenden Experimenten kollektive Wechselwirkungseffekte stärker in Erscheinung treten.

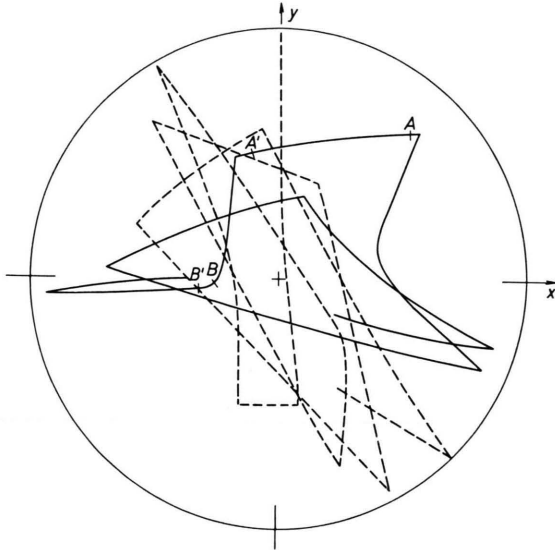


Abb. 1. Projektion der Bahnkurven zweier Teilchen (Ausschnitt!) auf die x,y -Ebene ($N=6$, $\alpha=4$). Die gezeigten Ausschnitte umfassen ca. 7700 Integrationsschritte, AA' und BB' jeweils 500 Integrationsschritte (variable Schrittweite!).

Zunächst wird kurz das Rechenverfahren beschrieben und im Anschluß daran die Bestimmung thermodynamischer Variabler. Ausführlich wird das elektrische Mikrofeld und Mikropotential diskutiert, ferner sollen dann Korrelationsfunktionen und Relaxationszeiten behandelt werden.

1. Das Rechenverfahren

a) Bewegungsgleichungen

Zweckmäßig führt man dimensionslose Orts- und Zeitkoordinaten

$$\varrho_{jn} = r_{jn}/r_0 \quad \text{und} \quad \tau = t/t_0 \quad (3)$$

mit

$$r_0^3 = 3 N / 4 \pi n \quad \text{und} \quad t_0^2 = 3 m N / 4 \pi n e^2 \quad (3a)$$

derart ein, daß der dimensionslose Radius der Begrenzungskugel gleich 1 und die Zeit in geeigneter Weise auf die Plasmafrequenzperiode bezogen wird. Um Rechenzeit zu sparen und beide Plasmakomponenten symmetrisch in die Rechnungen eingehen zu lassen, werden die Massen m der positiv und negativ geladenen Teilchen (Ladungsbetrag e) gleichgesetzt. Alle anderen physikalischen Größen kann man dann durch den bereits eingeführten Parameter α und die Gesamtteilchenzahl N ausdrücken (s. Tab. 1).

Die Bewegungsgleichungen für Coulomb-Wechselwirkung lauten damit:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varrho_{jn}}{d\tau^2} &= \sum_{i \neq j} \frac{\varepsilon_i \varepsilon_j (\varrho_{jn} - \varrho_{in})}{|\varrho_j - \varrho_i|^3}; \\ n &= 1, 2, 3; \quad i, j = 1, 2, \dots, N; \\ \varepsilon_k &= (-1)^k; \quad \sum_k \varepsilon_k = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Größe	cgs-Einheiten	Systemeinheiten
Temperatur	$T = \frac{m \langle v^2 \rangle}{3k}$	$T' = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \alpha^2 N^{1/3}$
Druck	$p = n k T$	$p' = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{4/3} \alpha^2 N^{4/3}$
Plasmafrequenz	$\omega = \left(\frac{4\pi n e^2}{m} \right)^{1/2}$	$\omega' = (3N)^{1/2}$
Debye-Länge	$d = \left(\frac{kT}{4\pi n e^2} \right)^{1/2}$	$d' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/6} \frac{\alpha}{N^{1/3}}$
Holtmark-Normalfeldstärke	$F_0 = 2,61 e n^{2/3}$	$F_0' = N^{2/3}$
Mittleres Mikropotentialqu.	$\langle \varphi^2 \rangle = \pi e^2 n d$	$\langle \varphi^2 \rangle' = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/6} \alpha N^{2/3}$

Tab. 1. Umrechnung physikalischer Größen (m Masse, n Dichte, e Ladung, k Boltzmann-Konstante).

Zur numerischen Lösung des Gleichungssystems (4) wird ein Predictor-Corrector-Verfahren (ähnlich v. HOERNER¹⁾) verwendet. Zunächst wird mit den momentanen Kräften $K^0(\tau)$ ein vorläufiger Ort $\tilde{\varrho}(\tau + \Delta\tau)$ berechnet.

$$\tilde{\varrho}_{jn} = \varrho_{jn}^0 + (v_{jn}^0 + \frac{1}{2} K_{jn}^0 \Delta\tau) \cdot \Delta\tau, \quad (5)$$

$\Delta\tau$ = Integrationsschrittweite.

Mit diesen vorläufigen Orten werden dann die Kräfte $K^1(\tau + \Delta\tau)$ bestimmt und unter Einbeziehung der Kräfte K^{-1} und K^0 zu vorangehenden Zeitpunkten ein gewichtetes Mittel gebildet.

$$\mathbf{K} = \frac{1}{6} (\mathbf{K}^{-1} + 4 \mathbf{K}^0 + \mathbf{K}^1). \quad (6)$$

Hiermit werden nun die Geschwindigkeiten und genaueren Orte errechnet:

$$\begin{aligned} v_{jn} &= v_{jn}^0 + K_{jn} \Delta\tau, \\ \varrho_{jn} &= \varrho_{jn}^0 + \frac{1}{2} (v_{jn}^0 + v_{jn}) \Delta\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Im nächsten Integrationsschritt werden mit den jetzigen momentanen Kräften K^1 zunächst wieder vorläufige Orte bestimmt, dafür die Kräfte errechnet usf. Nach diesem Rechenverfahren dürften die Orte genauer berechnet sein als die Geschwindigkeiten.

b) Schrittweite und Genauigkeit

In den Gln. (5) und (7) wird die Integrations-schrittweite $\Delta\tau$ variabel gehalten. Bei sehr engen Begegnungen zweier Teilchen werden sich die Kräfte in relativ kleinen Zeitabschnitten bereits stark ändern; die Schrittweite sollte daher zweckmäßig eine Funktion des jeweiligen Abstandes zweier Teilchen sein. Für $\Delta\tau$ wird folgende Formel angesetzt:

$$\Delta\tau = \frac{r_{\min}}{v_{\max}} \cdot y \cdot \frac{1}{\mu} \frac{1}{1 + |\Delta E/E| 200}. \quad (8)$$

Darin bedeutet r_{\min} den kleinsten aller momentanen gegenseitigen Abstände und v_{\max} den größten momentanen Geschwindigkeitsbetrag. Der Aufpunkt wird in diesem Sinn auch als Teilchen angesehen, damit die dort registrierte Feldstärke bei sehr nahen Vorüberflügen eine gute zeitliche Auflösung zeigt. Um auch bei sehr engen Begegnungen eine ausreichende Genauigkeit zu gewährleisten, wird der Faktor

$$y = \begin{cases} 1 & \text{für } r_{\min} \geq 10^{-2} \\ 10^{\lfloor \lg 100 r_{\min} \rfloor} & \text{für } r_{\min} < 10^{-2} \end{cases} \quad \begin{cases} [x] \triangleq \text{Größe} \\ \text{ganze Zahl} < x \end{cases} \quad (9)$$

hinzugefügt. Der Proportionalitätsfaktor μ wird je nach Teilchenzahl, Gesamtenergie und gewünschter Bahngenauigkeit in der Größenordnung 10–50 gewählt. Der vierte Faktor in der Schrittweitenformel (8) bewirkt eine automatische Korrektur bei vorkommenden Energieabweichungen ΔE , wobei ΔE die Änderung der Gesamtenergie während des letzten Integrationsschrittes bedeutet. Die Gesamtenergie,

die wegen der Abgeschlossenheit des Systems konstant sein müßte, ist eine empfindliche Kontrollgröße für die numerische Integration¹. Obwohl bei den vorliegenden Rechnungen relativ große Energieabweichungen zugelassen wurden – im Beispiel mit $N=96$ war die Gesamtenergie während 1000 Integrationsschritten entsprechend einer mittleren Bahn-länge eines Teilchens von 12 Kugeldurchmessern nur bis auf $\pm 5\%$ konstant –, konnten keine Auswirkungen auf die Verteilungsfunktionen der abgefragten Phasengrößen festgestellt werden. Dies wurde in einem Beispiel dadurch nachgeprüft, daß sich bei halbiertem Schrittweite die gleichen Resultate ergaben.

c) Anfangskonfigurationen

Die Anfangskonfigurationen wurden mit einem Zufallszahlengenerator durch den Rechner erzeugt. Die Geschwindigkeiten wurden nach einem von KOLLER⁶ angegebenen Verfahren gemäß einer Maxwell-Gauß-Verteilung ausgewürfelt, die Ortskonfiguration gemäß einer für gleiche Teilvolumina gleichen a priori-Wahrscheinlichkeit. Weicht die potentielle Energie der Anfangskonfiguration zufällig stark vom späteren Mittelwert der potentiellen Energie ab, so hat die Einstellung auf diesen Mittelwert natürlich Rückwirkungen auf die Geschwindigkeitsverteilung. Deshalb können Temperatur und der Parameter α bei der Planung der Rechnung nur der Größenordnung nach vorgegeben werden. Der genaue Wert muß nachträglich bestimmt werden.

2. Die Bestimmung der thermodynamischen Variablen

Bei gegebener Teilchenzahl N ist der Parameter α durch das zweite Moment der Geschwindigkeitsverteilung gegeben [s. Gl. (1)]. $\langle v^2 \rangle$ kann man auf drei verschiedene Arten ermitteln. Erstens kann man die Geschwindigkeitsverteilung^{6a} $W(v)$ direkt registrieren (Abb. 2) und mit ihr die Momente $\langle v_v^2 \rangle$ bilden. Zweitens kann man ebenso aus der Verteilungsfunktion der gesamten kinetischen Energie nach

nummer bestimmt und dort das Zeitintervall als Gewicht gespeichert. Alle x -Werte größer x_{\max} werden dem Kanal mit der Nummer $k+1$ zugeordnet. Am Ende des Experimentes werden die aufsummierten Inhalte aller Kanäle durch die Gesamtzeit dividiert und man erhält die normierte Verteilungsfunktion.

⁶ A. KOLLER, Zur mathematischen Theorie der Nichtgleichgewichtsvorgänge im Plasma, Verlag Flugtechnik, Stuttgart 1960.

^{6a} Wenn die Verteilungsfunktion einer Größe x im Intervall $[0, x_{\max}]$ aufgenommen werden soll, unterteilt man das Intervall in k Intervalle gleicher Breite Δx („Kanäle“). Vom momentanen Wert x wird die zugehörige Kanal-

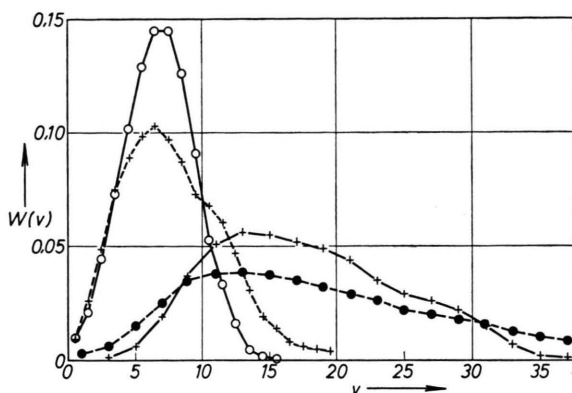


Abb. 2. Verteilungsfunktionen der Geschwindigkeitsbeträge am Ende der Experimente (○—○—○ $N=6$, $\alpha=4$; +—+—+ $N=24$, $\alpha=4$; +—+—+ $N=24$, $\alpha=8$; ●—●—● $N=96$, $\alpha=8$; v in dimensionslosen Einh.).

Gleichung (10)

$$\langle v_{\text{kin}}^2 \rangle = \frac{2}{N} \langle E_{\text{kin}} \rangle \quad (10)$$

auf $\langle v_{\text{kin}}^2 \rangle$ schließen. Drittens kann man unter Zugrundelegung des idealen Gasgesetzes über den Druck bzw. die direkt während des Experimentes registrierte Impulsübertragung auf die Begrenzungsfläche nach Gl. (11)

$$p = \frac{1}{4\pi} N \langle v_p^2 \rangle \quad (11)$$

ebenfalls das zweite Moment $\langle v_p^2 \rangle$ ermitteln.

Die Ergebnisse sind in Tab. 2 zusammengestellt.

N	p	E_{kin}	$\langle v_v^2 \rangle$	$\langle v_{\text{kin}}^2 \rangle$	$\langle v_p^2 \rangle$	α
6	26	168	53	56	55	4,03
6	103	660	215	220	219	8,03
24	165	1 020	83	85	86	4,00
24	673	4 260	334	355	353	8,15
96	4196	27 450	520	572	576	8,20

Tab. 2. Zur Bestimmung des Parameters α .

Ersichtlich liegen die aus den Geschwindigkeitsverteilungen berechneten Momente bei höheren Teilchenzahlen bis zu 10% unter den beiden anderen. Diese systematische Abweichung hat ihre Ursache in der Begrenzung der Verteilungsfunktion bei hohen Geschwindigkeiten. Alle Geschwindigkeiten $v > v_{\text{max}}$ wurden dadurch nur mit v_{max} bei der Berechnung des Momentes berücksichtigt (s. Fußnote 6a). Die in der letzten Spalte stehenden α -Werte wurden aus $\langle v_p^2 \rangle$ berechnet.

Abb. 3 zeigt die Verteilungsfunktion der Abweichung der kinetischen Energie von ihrem Mittelwert bezogen auf letzteren. Die Verteilung wird schmaler (rel. Breite) mit wachsender Teilchenzahl N , ein Er-

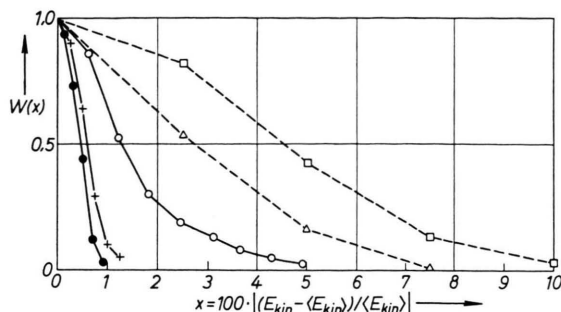


Abb. 3. Verteilungsfunktionen der Schwankungen der kinetischen Energie (□—□—□ $N=6$, $\alpha=4$; ○—○—○ $N=6$, $\alpha=8$; △—△—△ $N=24$, $\alpha=4$; +—+—+ $N=24$, $\alpha=8$; ●—●—● $N=96$, $\alpha=8$).

gebnis, das nach der statistischen Mechanik zu erwarten ist. Weiter erkennt man, daß die relativen Halbwertsbreiten abnehmen, wenn α vergrößert wird. Das ist verständlich, wenn man bedenkt, daß die Verteilungsfunktion zu einer Δ -Funktion bei $\langle E_{\text{kin}} \rangle$ wird, wenn $\alpha \rightarrow \infty$ geht; in diesem Fall wird nämlich die Wechselwirkung der Teilchen untereinander vernachlässigbar. In Abb. 4 sind die experimentellen Verteilungsfunktionen der potentiellen Energie dargestellt. Als Abszisse ist das Verhältnis der gesamten potentiellen Energie zur potentiellen

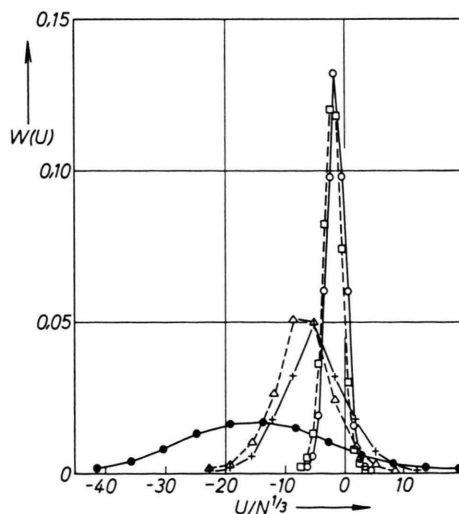


Abb. 4. Verteilungsfunktionen der potentiellen Energie (in dimensionslosen Einheiten) (□—□—□ $N=6$, $\alpha=4$; ○—○—○ $N=6$, $\alpha=8$; △—△—△ $N=24$, $\alpha=4$; +—+—+ $N=24$, $\alpha=8$; ●—●—● $N=96$, $\alpha=8$).

Energie zweier Teilchen, die sich im mittleren Abstand befinden, gewählt. Die potentielle und kinetische Energie müßten bei Vorliegen konstanter Gesamtenergie genau spiegelsymmetrische Verteilungsfunktionen besitzen. Wie man aus den Abb. 3 und 4 entnehmen kann, sind die Verteilungsfunktionen der kinetischen Energie etwa um den Faktor 2 breiter als die der potentiellen Energie. Hierin kommt die schlechtere Näherung bei der Berechnung der Geschwindigkeiten gegenüber den Orten zum Ausdruck. Allen Kurven in Abb. 4 ist die Lage des Maximums und des Mittelwertes bei negativen Werten der potentiellen Energie gemeinsam, wie dies nicht anders zu erwarten ist, da elektrisch neutrale Ladungskonfigurationen im Mittel negative potentielle Energie besitzen. Die Abb. 5 zeigt die Lage des genannten Maximums als Funktion der Teilchenzahl. Man erkennt, daß sich das Maximum bei größer werdendem

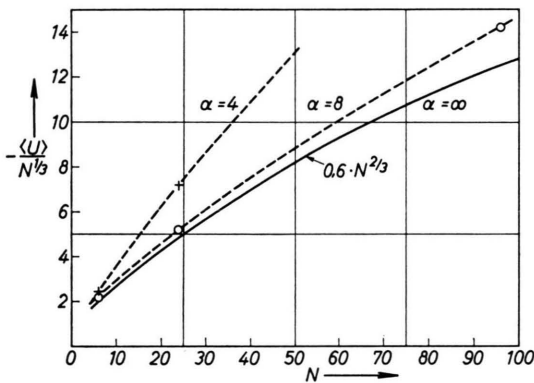


Abb. 5. Mittlere potentielle Energie (dimensionslose Einheiten) in Abhängigkeit von der Gesamtteilchenzahl N .

α -Wert immer mehr der Kurve für N Teilchen ohne Wechselwirkung ($\alpha = \infty$) nähert. Da mit wachsendem α die Zweierwechselwirkung abnimmt, verlaufen die gleichnamigen Stöße in geringerer und die ungleichnamigen in größerer gegenseitiger Entfernung, was sich im Mittel in einer Verschiebung des Maximums der Verteilungsfunktion $W(U)$ äußert.

3. Die elektrischen Größen

a) Mikrofeld

Zu jedem Zeitpunkt wurde das elektrische Mikrofeld im neutralen, d. h. unbesetzten Mittelpunkt der Kugel registriert und die sich daraus ergebende zeitlich gemittelte Verteilungsfunktion des Feldstärken-

betrages gebildet (Abb. 6). Zum Vergleich mit diesen Verteilungsfunktionen ist die auf endliche Teilchenzahlen korrigierte, nicht durch Wechselwirkung beeinflusste Holtsmark-Verteilung heranzuziehen. Die

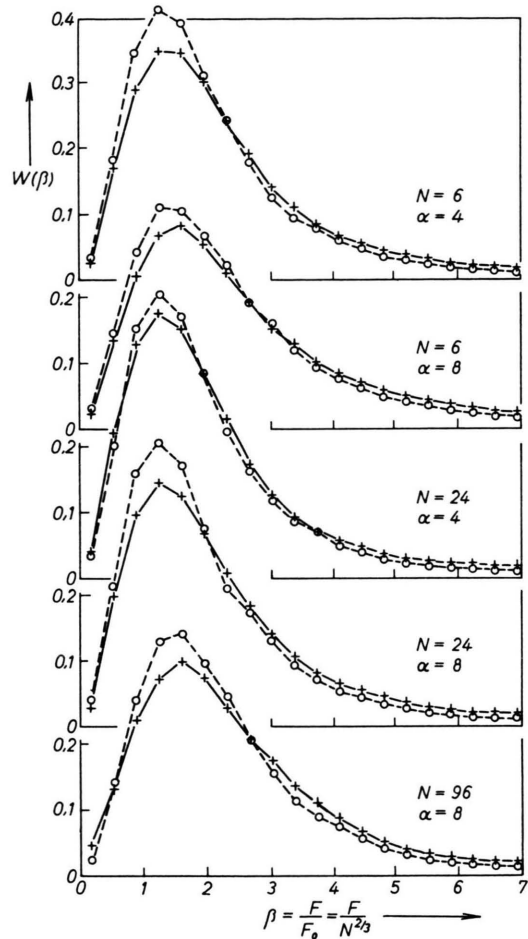


Abb. 6. Mikrofeldverteilungen unter Benutzung der üblichen Feldstärkevariablen β (+---+ bei Wechselwirkung, o---o Ensemblemittel ohne Wechselwirkung).

korrigierte Verteilung ist in erster Näherung wiederum eine Holtsmark-Verteilung mit einer um den Faktor $(1 - \frac{1}{3} N^{-1/3})$ reduzierten Normalfeldstärke F_0 . Bei $N=200$ verschiebt sich demnach das Maximum um etwa 5% gegenüber der Holtsmark-Verteilung für $N \rightarrow \infty$. Des weiteren ist zu berücksichtigen, daß die Teilchendichte innerhalb der Kugel auf Grund endlicher Versuchsdauer im allgemeinen nicht völlig homogen ist (Abb. 7). Eine Verteilungsfunktion, die genau der gleichen inhomogenen Dichte entspricht und den Teilchenzahleneffekt berücksichtigt, wird auf folgende Weise erzeugt: Mit Hilfe des

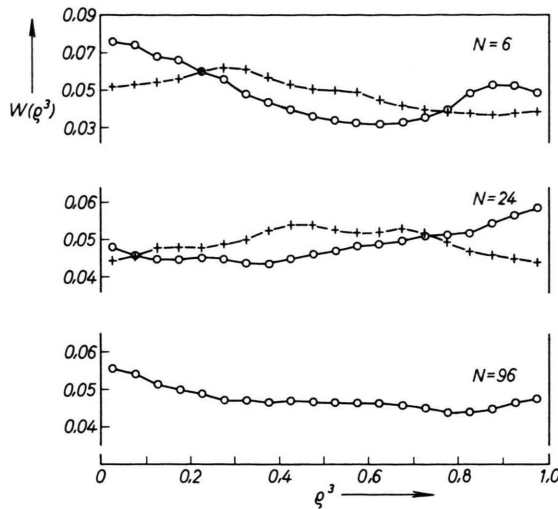


Abb. 7. Über Kugelschalen gleichen Volumens ($\Delta \rho^3 = 0,05$) gemittelte Dichte (+—+—+ $\alpha=4$, o—o—o $\alpha=8$, Ordinatennullpunkt unterdrückt!).

Kollerschen Verfahrens werden Konfigurationen mit eben dem jeweiligen radialen Dichteverlauf (Abb. 7) ausgewürfelt („Monte Carlo“-Methode) und deren Mikrofeldverteilung als Konfigurationsmittel erhalten. Abb. 8 zeigt zunächst die gute Übereinstimmung der Holtsmark-Verteilung mit der so erzeugten Verteilung für homogene Dichte bei $N=200$.

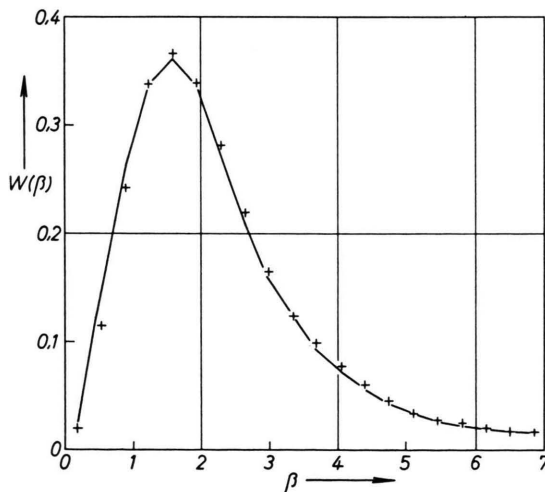


Abb. 8. Ensemble-Mikrofeldverteilungen (— analytisch nach Holtsmark, korr. auf $N=200$, +—+ numerisch nach „Monte Carlo“-Methode).

In Abb. 6 ist zum Vergleich das wechselwirkungs-freie Konfigurationsmittel gemäß dem vorher gesagten für die jeweilige Dichteverteilung eingezeichnet. Beim Vergleich der Kurven tritt deutlich hervor, daß

bei Berücksichtigung der Wechselwirkung in allen Fällen das Maximum abgesenkt ist und im Mittel höhere Feldstärken resultieren. Als Maß für die Abweichungen gegenüber den ausgewürfelten Verteilungsfunktionen können die Größen Median F_m , erstes $\langle F \rangle$ und zweites Moment $\langle F^2 \rangle$ der Feldstärke F bzw. der Feldstärkekomponente F_x dienen, die aus den gemessenen Verteilungsfunktionen gewonnen wurden (s. Tab. 3). Nach der Holtsmarkschen Theorie existiert das zweite Moment $\langle F_H^2 \rangle$ nicht; im Experiment kommen jedoch nur endliche Feldstärken vor, so daß $\langle F^2 \rangle$ endlich bleibt. [Mit dem Index H (Holtsmark) sind die Konfigurationsmittel bezeichnet.]

N	α	$\frac{F_m}{F_{mH}}$	$\frac{\langle F \rangle}{\langle F_H \rangle}$	$\frac{\langle F^2 \rangle}{\langle F_H^2 \rangle}$	$\frac{\langle F_x \rangle}{\langle F_{xH} \rangle}$	$\frac{\langle F_x^2 \rangle}{\langle F_{xH}^2 \rangle}$
6	4	1,10	1,07	1,13	1,21	1,43
6	8	1,07	1,05	1,10	1,19	1,31
24	4	1,03	1,02	1,04	1,17	1,26
24	8	1,10	1,06	1,10	1,35	1,52
96	8	1,07	1,07	1,10	1,31	1,50

Tab. 3. Medianwerte und Momente des Mikrofeldes.

Die Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen den Plasmateilchen und die Einführung der zeitlichen Mittelung an Stelle des Holtsmarkschen Ensemblemittels führt zu einer Verschiebung des Maximums der Verteilungsfunktion des Mikrofeldes nach höheren Werten der Feldstärke im Sinne der

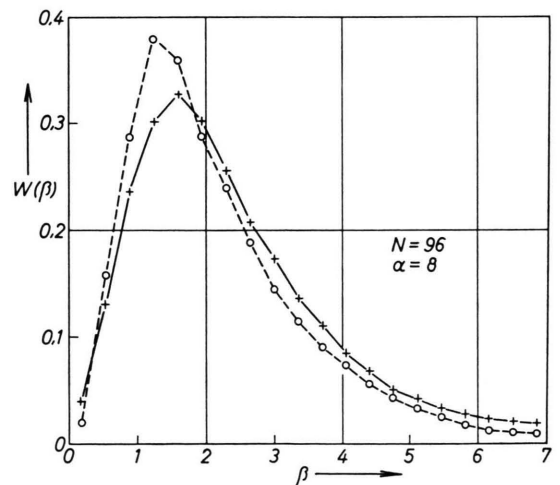


Abb. 9. Mikrofeldverteilungen (+—+—+ experimentell bei $N=96$, $\alpha=8$; o—o—o nach ECKER).

⁷ K. HUNGER u. R. W. LARENZ, Z. Phys. **163**, 245 [1961].

Theorie von HUNGER und LARENZ⁷, im Gegensatz zu anderen bisher erschienenen Arbeiten, die eine Verschiebung nach kleineren Werten verlangen (s. z. B. WEISE⁸, dort weitere Literatur). In Abb. 9 ist zum Vergleich mit den Experimenten für das Beispiel $N=96$ und $\alpha=8$ die Verteilungsfunktion (korrigiert auf $N=96$) nach ECKER⁹ eingezeichnet. Die Unterschiede erscheinen hier noch deutlicher.

b) Mikropotential

Eine der Holtsmark'schen Mikrof়eldverteilung analoge Verteilung des Mikropotentials existiert nicht. Man erhält sie nur dann, wenn man die Wechselwirkung etwa in Form eines Integralabschneidens berücksichtigt. Es ergibt sich dabei als Verteilung in guter Näherung eine Gauß-Kurve^{10, 11}. Das zweite Moment des Potentials existiert für wechselwirkungsfreie Teilchen ebenfalls nur, wenn man endlich viele Teilchen berücksichtigt. Für ein elektrisch neutrales Plasma ergibt sich in dimensionslosen Einheiten

$$\langle \varphi_H^2 \rangle = \frac{3}{4} N. \quad (12)$$

Genau diesen Wert erhält man auch bei den hier untersuchten Teilchenzahlen im Zuge einer Mittelung über Konfigurationen, die durch einen Zufallszahlengenerator erzeugt werden. Die Vergleichsverteilungen entsprechen also den beim Mikrof়eld benutzten. Die Ergebnisse für die analog dem Mikrof়eld registrierten Momente des Mikropotentials sind in Tab. 4 zusammengestellt.

N	α	$\frac{\langle \varphi \rangle}{\langle \varphi_H \rangle}$	$\frac{\langle \varphi^2 \rangle}{\langle \varphi_H^2 \rangle}$	$\frac{\langle \varphi^4 \rangle}{\langle \varphi_H^4 \rangle}$
6	4	1,41	1,76	1,55
6	8	1,36	1,59	1,32
24	4	1,18	1,27	1,18
24	8	1,38	1,86	2,41
96	8	1,42	2,01	2,32

Tab. 4. Momente des Mikropotentials.

Aus den angegebenen Momentenverhältnissen liest man ab, daß auch beim Mikropotential die Mittelung über Bahnen zu flacheren und breiteren Verteilungen führt gegenüber den mit der „Monte Carlo“-Methode gewonnenen wechselwirkungsfreien Werten φ_H .

⁸ K. WEISE, Z. Phys. **183**, 36 [1965].

⁹ G. ECKER, Z. Phys. **148**, 593 [1957].

¹⁰ T. MORITA, Progr. Theor. Phys. Kyoto **23**, 1211 [1960].

c) Einfluß der Begrenzungsflächen auf die Verteilungsfunktionen

Um das Entweichen der Teilchen zu verhindern, müssen die N Teilchen, wie eingangs erwähnt, in einem spiegelnden Behälter eingeschlossen werden. Schwankungen der Gesamtteilchenzahl N können nicht auftreten. Das Fehlen dieser Schwankungen bewirkt, daß die Verteilungsfunktionen schmäler sind als die auf ein Volumen gleicher Größe, in dem die Teilchenzahl Schwankungen unterliegt, bezogenen Verteilungsfunktionen. Um diesen Effekt nachzuweisen, wurde im Fall $N=96$ außer der Verteilungsfunktion $W_1(F)$ für das Gesamtfeld aller 96 Teilchen, die sich in der Kugel mit dem Radius 1 bewegten, auch die Verteilungsfunktion $W_{0,8}(F)$ des Feldes der Teilchen registriert, deren Abstand vom Aufpunkt (Kugelzentrum) kleiner als 0,8 war. Da die Teilchen die Oberfläche dieser Kugel mit dem Radius 0,8 ungehindert durchdringen können, sind die Schwankungen der Teilchenzahl in ihr von Null verschieden. Beim Vergleich (Abb. 10) zeigt sich

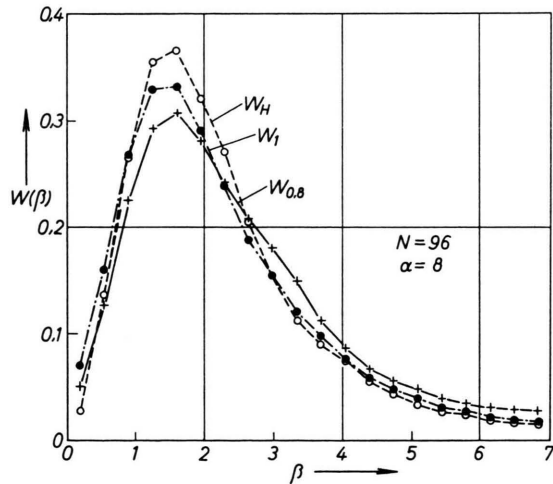


Abb. 10. Zum Einfluß der Teilchenzahlschwankungen auf die Mikrof়eldverteilungen (W_H Ensemblemittel, W_1 Feldverteilung unter Berücksichtigung aller 96 Teilchen, $W_{0,8}$ unter Berücksichtigung nur der Teilchen mit Radien $\varrho < 0,8$).

deutlich, daß bei Berücksichtigung der Schwankungen im Mittel um 10% höhere Felder auftreten, obgleich im Mittel jetzt nur 49 von 96 Teilchen zum Feld beitragen. Gegenüber der ebenfalls eingezeichneten Holtsmark-Verteilung $W_H(F)$, die durch Auswürfeln gewonnen wurde, ergeben sich noch größere

¹¹ R. W. LARENZ, Proc. Vth Intern. Conf. on Ion. Phen. in Gases (Munich 1961), p. 1650, Amsterdam 1962.

Unterschiede. Bei den hier benutzten Teilchenzahlen und α -Werten ist der Kugelradius R von der gleichen Größenordnung wie der Debye-Radius d . Durch den Einschluß der N Teilchen in die Kugel werden also Schwankungen über Entfernungen eines Debye-Radius weitgehend unterdrückt; Effekte dieser Art sind zu beachten, wenn man Ergebnisse derartiger Rechnungen auf den Fall eines unendlich ausgedehnten Mediums übertragen will.

d) Zeitliches Verhalten des zweiten Momentes der Mikrofeldstärke

Die mittlere quadratische Feldstärke wurde nach Gl. (13)

$$\langle F^2(\tau) \rangle = \frac{1}{\tau} \sum_i F_i^2(\tau) \cdot \Delta\tau_i, \quad \tau = \sum_i \Delta\tau_i \quad (13)$$

während der Rechnungen gebildet und laufend registriert. In Abb. 11 ist das zeitliche Verhalten von

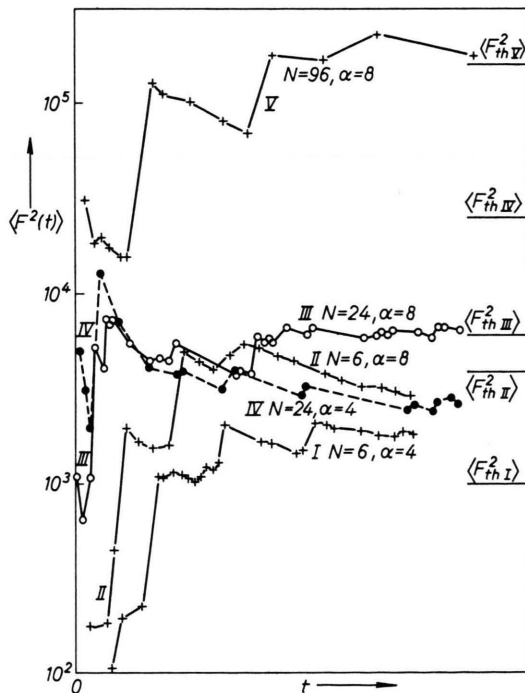


Abb. 11. Zeitliche Entwicklung des 2. Momentes der Mikrofeldstärke (Zeitskala in willkürlichen Einheiten). In der Abbildung sind die römischen Ziffern III und IV an den Kurven vertauscht. Die richtige Zuordnung der Werte ergibt sich aus Tab. 5.

$\langle F^2 \rangle$ aufgetragen. Zum Vergleich ist dort der Wert des von HUNGER und LARENZ⁷ abgeleiteten Ausdruckes [Gl. (14)] für $\langle F^2 \rangle$

$$\langle F^2 \rangle = 9 \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{-1/3} \cdot \alpha^2 N^{1/3} \quad (14)$$

eingezeichnet. Die Kurven nähern sich ersichtlich schnell einem konstanten Wert, der überraschenderweise die Größenordnung des aus Gl. (14) folgenden hat, wenngleich bei diesen Teilchenzahlen noch keineswegs ein kollektives Fernfeld im Sinne von HUNGER und LARENZ⁷ vorliegt. Tab. 5 enthält die gemessenen und die nach Gl. (14) erhaltenen Werte.

Nr.	N	α	$\langle F_{th}^2 \rangle^{1/2}$	$\langle F_{exp}^2 \rangle^{1/2}$	$\langle q_{exp}^4 \rangle^{1/2}$
I	6	4	32	42	39
II	6	8	63	55	—
III	24	4	78	52	47
IV	24	8	160	81	97
V	96	8	405	410	495

Tab. 5. 2. Mikrofeld- und 4. Mikropotentialmoment.

Dort ist auch das vierte Moment des Mikropotentials, das in gleicher Weise wie $\langle F^2 \rangle$ gewonnen wurde, wiedergegeben. Nach HUNGER und LARENZ¹² sollte es mit dem zweiten Moment der elektrischen Feldstärke übereinstimmen. Tatsächlich ergeben sich bei den Experimenten für beide Ausdrücke ungefähr die gleichen Werte.

4. Die zeitliche Korrelationsfunktion des Mikrofeldes

Die Abb. 12 * zeigt an zwei Beispielen herausgegriffener Zeitintervalle die zeitlichen Schwankungen des Mikrofeldes an einem festen, neutralen Aufpunkt bei dem Experiment mit 96 Teilchen. Von der Plotter-Einheit des Computers ist über der Zeit der Logarithmus des Betrages (!) der Feldstärke aufgetragen. Die Kurven lassen deutlich einen Mittelwert erkennen, um den das Feld schwankt. Im Intervall der Abb. 12 a kommen keine extrem hohen oder niedrigen Feldstärken vor, während in Abb. 12 b vier starke Abweichungen kurz nacheinander auftreten. Die feinen Stufen in den Kurven kennzeichnen jeweils einen Integrationsschritt $\Delta\tau$. Gemäß der Definition der Korrelationsfunktion für eine Versuchsdauer τ'

$$K(\tau) = \frac{\int_0^{\tau'-\tau} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t+\tau) dt}{\left[\int_0^{\tau'-\tau} F^2 dt \cdot \int_{\tau}^{\tau'} F^2 dt \right]^{1/2}} \quad \tau \ll \tau' < \infty \quad (15)$$

$$K(0) = 1$$

¹² K. HUNGER u. R. W. LARENZ, Beitr. Plasmaphys. 3, 161 [1963].

* Abb. 12 a und b auf Tafel S. 768 a.

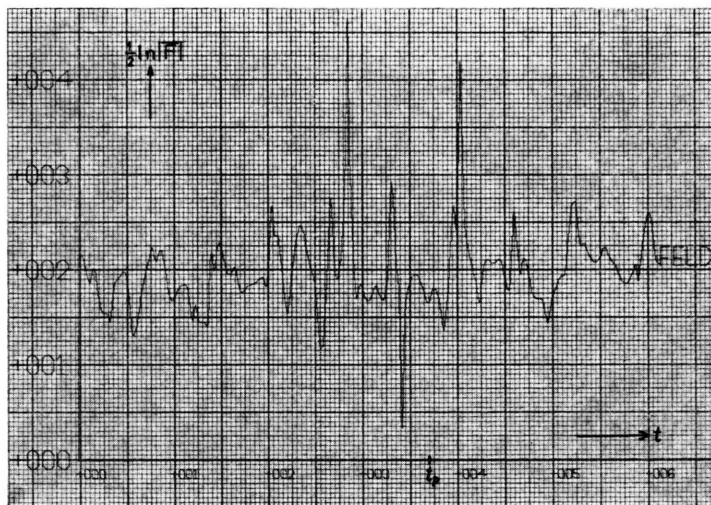


Abb. 12 a, b. Das zeitliche Verhalten des Logarithmus vom Betrage des Mikrofeldes (Ausschnitt(!) von ungefähr 1,8 Plasmafrequenzperioden t_p). Die feinen Stufen in den Kurven, die jeweils einen Integrationsschritt kennzeichnen, sind durch die Reproduktion weitgehend verloren gegangen.

benötigt man die Komponenten der Feldstärke, die der oben gezeigten zeitlichen Aufzeichnung nicht zu entnehmen sind.

Es wurden zwei Experimente mit jeweils 100 Teilchen durchgeführt. Im ersten waren die 100 Teilchen in einem Kubus mit der Kantenlänge 2 eingeschlossen (es befanden sich also im Mittel 52 Teilchen in der bisher zugrunde gelegten Kugel vom Radius 1), während im zweiten Experiment sich alle 100 Teilchen in der genannten Kugel befanden. Die Feldstärkekomponenten wurden zunächst als Zeitfunktion bei nicht äquidistanten Zeitpunkten auf Magnetband gespeichert. Interpolation lieferte die Feldstärkekomponenten zu äquidistanten Zeitpunkten, so daß die Integrale nach Gl. (15) numerisch ausgewertet werden konnten. Abb. 13 zeigt die erhaltenen ex-

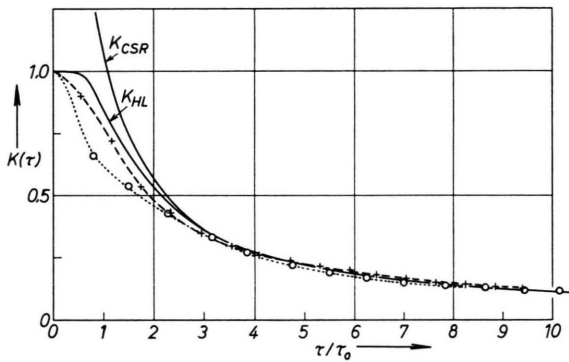


Abb. 13. Zeitliche Korrelationsfunktion des Mikrofeldes: Experiment (○—○—○ $\alpha=2,3$; +—+—+ $\alpha=1,4$), Theorie (K_{CSR} nach COHEN, SPITZER und ROUTLY, K_{HL} nach HUNGER und LARENZ).

perimentellen Korrelationsfunktionen. Zum Vergleich ist die von HUNGER und LARENZ⁷ unter der Annahme von geraden Bahnen der Feldteilchen abgeleitete Korrelationsfunktion $K_{HL}(\tau)$

$$K_{HL}(\tau) = \Phi(\tau_0/\tau), \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \langle v^2 \rangle^{-1/2} \quad (16)$$

in den hier benutzten dimensionslosen Größen eingetragen. Diese zeigt für $\tau > \tau_0$ das gleiche Verhalten wie die von COHEN, SPITZER und ROUTLY¹³ angegebene Korrelationsfunktion, die ebenfalls in Abb. 13 eingezeichnet ist. Man erkennt, daß die experimentellen Kurven für große Werte von τ sehr gut den theoretisch geforderten $1/\tau$ -Abfall zeigen. Für $\tau < 2\tau_0$ verlaufen sie unterhalb der angegebenen theoretischen Kurven, wie dies bei physikalischen Korrelationsfunktionen sein muß, die für kleine τ in der Umgebung von $K(0) = 1$ durch einen Parabelbogen angenähert werden können.

Eine für kleine τ verbesserte Integration gemäß Gl. (42) in⁷ liefert als Korrelationsfunktion

$$K(\tau) \cong (1 + \tau^2/\tau_0^2)^{-1/2}.$$

Das Versuchsergebnis für den bereits merklich von eins abweichenden α -Wert 2,3 stimmt hiermit so überein, daß bei einer Eintragung in Abb. 13 praktisch keine Unterschiede zu erkennen sind.

5. Zu den Relaxationszeiten im Plasma

Numerische Experimente der vorliegenden Art ermöglichen es auch, die Relaxationszeiten der Plasmateilchen experimentell zu bestimmen. Es werden in üblicher Weise zwei Relaxationszeiten unterschieden: 1. die Energie-Relaxationszeit τ_E , die dadurch definiert ist, daß sich nach Ablauf von τ_E im Mittel die kinetische Energie eines Teilchens um seine Anfangsenergie E geändert hat, und 2. die Impuls-Relaxationszeit τ_D , die dadurch definiert ist, daß sich nach Ablauf von τ_D im Mittel die Richtung des Anfangsimpulses um $\frac{1}{2}\pi$ geändert hat. Im letzteren Fall sind selbstverständlich die Richtungsänderungen bei den Reflexionen an der Gefäßwand zu subtrahieren. Natürlich lassen sich Relaxationszeiten auch für andere und insbesondere auch für kleinere Bezugsänderungen E' bzw. geeignete Winkel als die eben genannten E bzw. $\frac{1}{2}\pi$ definieren, jedoch lassen sich so definierte Zeiten $\tau'_{E,D}$ leicht auf die vorher definierten zurückführen, solange sich die Bezugsenergie E' bzw. der Bezugswinkel aus vielen kleinen positiven und negativen Energie- bzw. Winkeländerungen quadratisch zusammensetzt. Da Letzteres gerade für große Anfangsenergien gilt, wurde aus Rechenzeitgründen so verfahren, daß die Bezugsenergie, als reziprok lineare Funktion der Anfangsenergie E angesetzt, für kleine Energien zwar gleich der Anfangsenergie war, jedoch für die im Experiment ausgewerteten höheren Energien unter erheblicher Rechenzeitreduktion auf einen Bruchteil $(1 + E/E_*)^{-1}$ davon abfiel, der aber nicht unter einem Zehntel der Anfangsenergie lag. Da bei der Impulsrelaxation entsprechend vorgegangen wurde, liegt den zunächst ermittelten τ' und den üblicherweise definierten Relaxationszeiten τ der Zusammenhang

$$\tau_{E,D} = (1 + E/E_*)^2 \cdot \tau'_{E,D}, \quad E < 9 E_* \quad (17)$$

zugrunde. Für die so erhaltenen Relaxationszeiten sowie für die Geschwindigkeiten wurden die jeweili-

¹³ R. S. COHEN, L. SPITZER u. P. M. ROUTLY, Phys. Rev. **80**, 230 [1950].

gen Wahrscheinlichkeitsverteilungen gebildet und mit Hilfe dieser der funktionelle Zusammenhang zwischen τ und v hergestellt, und zwar unter der Annahme, daß die Relaxationszeiten für eine bestimmte Anfangsenergie nicht zu stark um die zugehörige mittlere Relaxationszeit streuen und daß letztere eine eindeutige monotone Funktion der Geschwindigkeit bzw. der Energie ist. In Abb. 14 sind

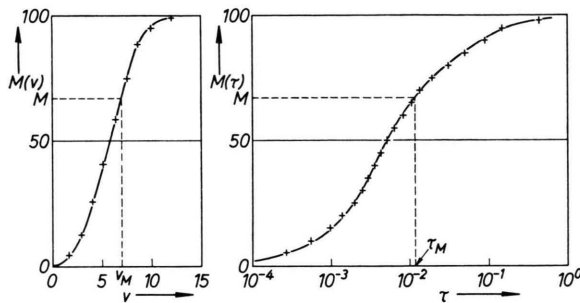


Abb. 14. Zuordnung der integrierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Geschwindigkeit v und Relaxationszeit τ (Beispiel).

die integrierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen für τ und v dargestellt, wobei $M_{\max} = N = 100$ die Gesamtteilchenzahl des Experimentes bedeutet. Aus den Kurven ist abzulesen, daß M Teilchen im Mittel eine Geschwindigkeit haben, die kleiner als v_M ist, und eine mittlere Relaxationszeit besitzen, die kleiner als τ_M ist. Die Teilchenzahl $M_{(v)} = M_{(\tau)}$ ist also der Parameter, der die Zuordnung zwischen τ und v vermittelt. Die so resultierenden Relaxationszeiten sind als Funktionen der Geschwindigkeit in Abb. 15 dargestellt. Zuverlässige Aussagen erhält man ersichtlich für den Bereich $v < 2v_0$ (v_0 entspricht dem Maximum der Maxwell-Verteilung), also gerade für den Bereich, der in den bisherigen Theorien durchweg nur unvollkommen erfaßt wird.

Zum Vergleich sind Kurven der Theorie nach CHANDRASEKHAR¹⁴ eingetragen, wobei in den Formeln (14, p. 301, 320) im Argument des Coulomb-Logarithmus eine 1 hinzugefügt wurde, um das Auftreten negativer Relaxationszeiten bei $v \rightarrow 0$ zu vermeiden. Will man erreichen, daß τ plausiblerweise mit v gegen Null geht, muß man die 1 durch eine Konstante $A > 1$ ersetzen. Es zeigt sich, daß A sehr viel größer als 1 zu wählen ist, um den Realitäten einigermaßen gerecht zu werden; in der Abb. 15 sind die Werte $A = 10$ und $A = 20$ benutzt. Für Ge-

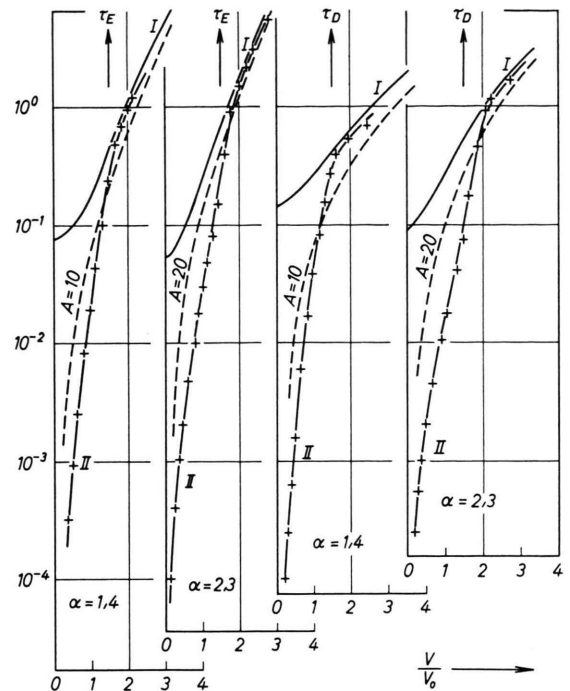


Abb. 15. Energie- und Impulsrelaxationszeiten τ_E und τ_D für ein Teilchen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit (I nach CHANDRASEKHAR (korr.), II experimentell, v_0 = wahrscheinlichste Geschwindigkeit, bezüglich A s. Text).

schwindigkeiten größer als v_0 nähern sich die experimentellen den theoretischen Kurven; dies dürfte zum Teil darauf beruhen, daß die Wechselwirkung sowohl in den vorliegenden Experimenten wie in der zum Vergleich herangezogenen Zweierstoß-Theorie keine wesentlich größere Reichweite als die eines mittleren Teilchenabstandes hat. In der Theorie schneidet man bekanntlich bei der Integration über die Stoßparameter beim mittleren Teilchenabstand (oder der Debye-Länge) ab, um Divergenzen zu vermeiden. Im Experiment tritt kollektive Wechselwirkung mit entfernteren Teilchen nicht auf, da, wie eingangs erwähnt, die Anzahl der Teilchen noch zu gering ist.

Für Anregung und vielfache Diskussionen danke ich Prof. Dr. K. HUNGER und Prof. Dr. R. W. LARENZ sowie Prof. Dr. G. BURKHARDT für förderndes Interesse. Zu großem Dank verpflichtet bin ich dem Rechenzentrum der Technischen Hochschule Hannover (Prof. Dr. G. BERTRAM und Mitarbeiter). Die Durchführung der Arbeit haben in dankenswerter Weise die Hannoversche Hochschulgemeinschaft der Technischen Hochschule sowie die Firma Kabel- und Metallwerke Gutehoffnungshütte A.G. in Hannover unterstützt.

¹⁴ S. CHANDRASEKHAR, *Astrophys. J.* **93**, 285 [1941].